

《随机过程》教学大纲

课程编码：1511104303

课程名称：随机过程

学时/学分：48/3

先修课程：《数学分析》、《概率论与数理统计》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：信息与计算科学教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质：随机过程是概率论与数理统计的后继课程，是数学与应用数学专业的专业选修课。随机过程通常被视为概率论的动态部分，即研究的是随机现象的动态特征，着重对随时间和空间变化的随机现象提出各种不同的模型并研究其内在的性质与相互联系，具有较强的理论性。该学科在社会科学、自然科学、经济和管理等各个领域中都有广泛的应用。随机过程论在理论与应用两方面都发展迅速，学习、了解这门学科对概率统计及数学其他分支如信息与计算科学、自然学科、工程技术乃至经济管理等方面的学者及科技工作者都是重要而且有益的。本课程开设在第6学期。

2. 课程任务：通过本课程的学习，学生应能较好地理解随机数学的基本思想，掌握几个常用过程，如泊松过程、马尔可夫链、生灭过程、更新过程、鞅的基本概念，基本理论及分析方法。提高学生的数学素质，加强学生运用随机过程的思想方法开展科研工作和解决实际问题的能力。

二、课程教学基本要求

《随机过程》要求在熟练掌握概率论的基础上深刻理解随机过程的基本思想，理解随机过程是概率论的动态部分的含义；掌握随机过程的分类方法及常见的随机过程（如 Poisson 过程、更新过程、Markov 链和鞅等）的各种性质、推广形式及简单应用。

本课程的成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60分为及格。

三、课程教学内容

第一章 准备知识

1. 教学基本要求

复习随机变量、分布函数、分布律和概率密度函数的概念，条件分布，函数的分布求法，常见的离散型与连续型分布，及多维随机变量的知识；复习随机变量的数学期望、方差、矩、协方差与协方差阵、相关系数的定义及计算；掌握条件数学期望的求法，全期望

公式的意义与应用；掌握随机变量的特征函数的定义、性质与求法；理解随机变量序列的各种收敛性。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握复习概率知识：概论空间，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，特征函数，母函数和拉氏变换， n 维正态分布，条件期望。

3. 教学重点和难点

教学重点是条件数学期望的求法，全期望公式的意义与应用。教学难点是随机变量的特征函数的定义、性质与求法。

4. 教学内容

第一节 概率空间

第二节 随机变量与分布函数

第三节 数字特征、矩母函数与特征函数

1. Riemann-Stieltjes 积分
2. 数字特征
3. 关于概率测度的积分
4. 矩母函数
5. 特征函数

第四节 收敛性

第五节 独立性与条件期望

1. 独立性
2. 独立随机变量和的分布
3. 条件期望

第二章 随机过程的基本概念和基本类型

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生能够掌握随机过程的背景、定义及分类；掌握随机过程的一维、二维分布函数、有限维分布函数、均值函数、方差函数与协方差函数等重要的数字特征，以及随机过程的特征函数的定义与应用；了解随机过程的按物理架构分类、按概率特性分类及几种常见随机过程，如二阶矩过程，正态随机过程，独立增量过程等。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握随机过程的基本概念和随机过程的分布律和数字特征，理解复随机过程的概念，掌握几种重要的随机过程的定义：正交增量过程、独立增量过程、马尔可夫过程、正态过程、布朗过程、平稳过程。

3. 教学重点和难点

教学重点是随机过程的背景、定义及分类，随机过程的一维、二维分布函数、有限维分

布函数、均值函数、方差函数与协方差函数等重要的数字特征。教学难点是随机过程的特征函数的定义与应用。

4. 教学内容

第一节 基本概念

第二节 有限维分布与 Kolmogorov 定理

第三节 随机过程的基本类型

1. 平稳过程
2. 独立增量过程

第三章 Poisson 过程

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生理解泊松过程的背景与定义，以及泊松过程的简单性质；掌握泊松过程的均值函数、方差函数、协方差函数的求法与应用；掌握两质点到达时间间隔的分布函数、概率密度及有关概率的求法；了解复合泊松过程背景，定义与示例，以及复合泊松过程的简单性质。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握 Poisson 过程的定义，掌握 Poisson 过程相联系的分布，了解三种 Poisson 过程的推广。

3. 教学重点和难点

教学重点是泊松过程的均值函数、方差函数、协方差函数的求法与应用。教学难点是两质点到达时间间隔的分布函数、概率密度及有关概率的求法。

4. 教学内容

第一节 Poisson 过程

第二节 与 Poisson 过程相联系的若干分布

1. X_n 和 T_n 的分布
2. 事件发生时刻的条件分布

第三节 Poisson 过程的推广

1. 非齐次 Poisson 过程
2. 复合 Poisson 过程
3. 条件 Poisson 过程

第四章 更新过程

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生理解更新过程的定义及其分布；了解更新方程及其应用。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握更新过程的定义、更新方程、更新定理以及延迟更新过程、更新回报过程、交替更新过程等更新过程的推广形式；掌握运用更新方程解决人口学中问题的技巧。

3. 教学重点和难点

教学重点是更新方程及其应用。教学难点是更新方程及其应用。

4. 教学内容

第一节 更新过程的定义及若干分布

1. 更新过程的定义
2. $N(t)$ 的分布及 $E[N(t)]$ 的一些性质

第二节 更新方程及其应用

1. 更新方程
2. 更新方程在人口学中的一个应用

第三节 更新定理

第四节 Lundberg-Cramer 破产论

第五节 更新过程的推广

1. 延迟更新过程
2. 更新回报过程
3. 交替更新过程

第五章 Markov 链

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生能够理解马尔可夫过程的背景与定义，马尔可夫过程的基本性质；熟悉常见马尔可夫过程；掌握马尔可夫链的背景、概念，常见马尔可夫链的定义与基本性质；齐次马尔可夫链，非齐次马尔可夫链的一步、二步转移概率，多步转移概率求法，转移概率矩阵与 C-K 方程介绍；了解马尔可夫链在金融学中的应用。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握 Markov 链及连续时间 Markov 链的定义、C-K 方程，各种状态分类及其特性，极限定理、平稳分布及极限分布，掌握分支过程及此基础上的人口结构变化的模型，Kolmogorov 微分方程。

3. 教学重点和难点

教学重点是马尔可夫链的背景、概念，常见马尔可夫链的定义与基本性质；齐次马尔可夫

链，非齐次马尔可夫链的一步、二步转移概率，多步转移概率求法，转移概率矩阵与 C-K 方程介绍。教学难点是极限定理、平稳分布及 Kolmogorov 微分方程。

4. 教学内容

第一节 基本概念

1. Markov 链的定义及一些例子
2. n 步转移概率，C-K 方程

第二节 状态的分类及性质

第三节 极限定理及平稳分布

1. 极限定理
2. 平稳分布与极限分布

第四节 Markov 链的应用

1. 分支过程
2. 人口结构变化的 Markov 链模型

第五节 连续时间 Markov 链

1. 连续时间 Markov 链模型
2. Kolmogorov 微分方程

第六章 鞅

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生理解理解随机游动和鞅的背景与定义；掌握停时理论及其实际应用；熟悉随机游动与鞅对金融现象的刻画。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学，使学生掌握鞅的定义，掌握鞅的停时定理，掌握一致可积性和鞅的收敛定理。

3. 教学重点和难点

教学重点是停时理论及其实际应用。教学难点是停时理论及其实际应用。

4. 教学内容

第一节 基本概念

第二节 鞅的停时定理及其应用

1. 鞅的停时定理
2. 停时定理得应用—关于期权值的界

第三节 一致可积性

第四节 鞅收敛定理

第五节 连续鞅

四、学时分配表

| 章序 | 内容 | 课时 | 备注 |
|----|----------------|----|----|
| 一 | 准备知识 | 6 | |
| 二 | 随机过程的基本概念和基本类型 | 6 | |
| 三 | 泊松过程 | 8 | |
| 四 | 更新过程 | 10 | |
| 五 | 马尔科夫链 | 10 | |
| 六 | 鞅 | 8 | |
| 合计 | | 48 | |

五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《应用随机过程》 主编: 张波 商豪 出版社: 中国人民大学出版社 出版时间: 2009年。

(二) 参考书:

1. 《应用随机过程》 主编: 钱敏平 龚光鲁 陈大岳 章复熹 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2011年。

2. 《随机过程初级教程》(第2版) 主编: Samuel Karlin Howard M. Taylor 庄兴无 陈宗洵 陈庆华 译 出版社: 人民邮电出版社 出版时间: 2007年。

3. 《概率论基础及其应用》 主编: 王梓坤 出版社: 科学出版社 出版时间: 1976年。

执笔: 许寿方

审定: 皮磊 梁桂珍